



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

*(Ενδεικτικές Απαντήσεις)*

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Βλέπε απόδειξη Σελ. 262, σχολικού βιβλίου

**A2.** Βλέπε ορισμό Σελ. 141, σχολικού βιβλίου

**A2.** Βλέπε διατύπωση θεωρήματος Σελ. 246 και γεωμετρική ερμηνεία Σελ. 247 σχολικού βιβλίου

**A4.**

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**B1.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - (x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Το πρόσημο της  $f'$  φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$		-	+
$f$		$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση  $0$  ίσο με  $f(0) = 0$ .

**B2.** Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f''(x) = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - (2x)((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 2 \cdot x \cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} =$$
$$\frac{2(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(-3x^2 + 1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-3x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

Λύνουμε την εξίσωση,

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \eta \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \eta \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Το πρόσημο της  $f''$  φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

X	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	-	+	-	
f	↪	↻	↪	

Επομένως η f είναι κυρτή στο διάστημα  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ , κοίλη στο διάστημα  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  και στο διάστημα  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ . Τα σημεία καμπής της συνάρτησης είναι τα  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$  και  $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ .

### B3.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα μελετήσουμε αν η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

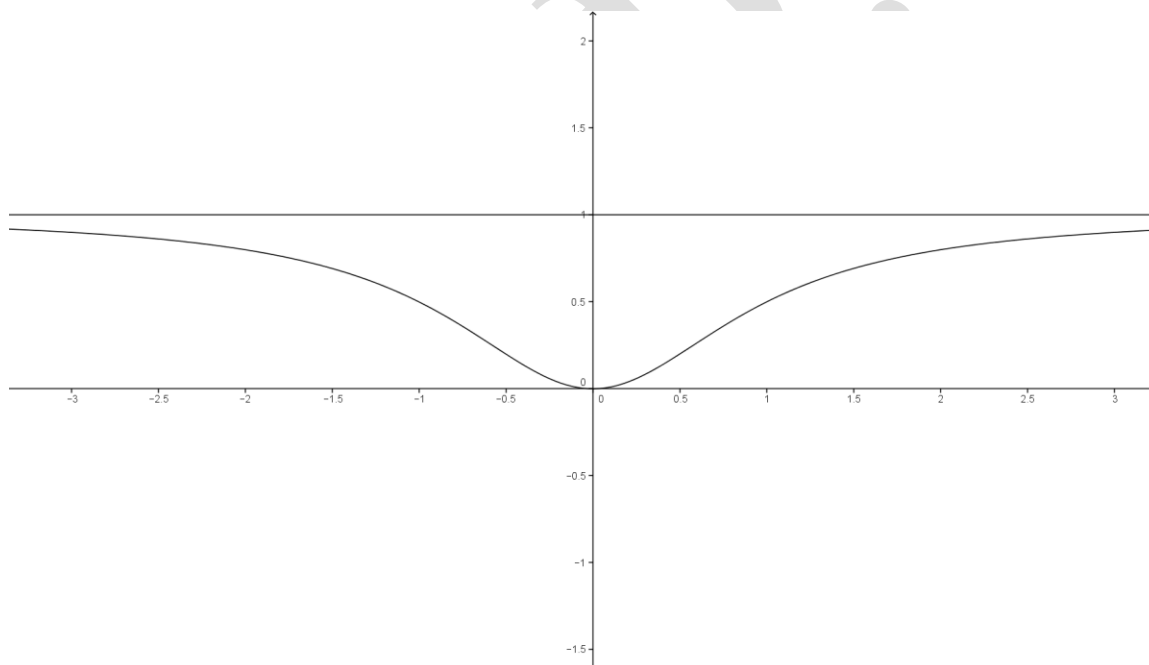
Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ . Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την  $y=1$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ . Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  την  $y=1$ .

**B4.** Φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''$	$-$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$
$f$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$f$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$

Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα B1,B2,B3 η γραφική παράσταση της  $f$  είναι



## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2e^{x^2}x - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$ .

Λύνουμε την εξίσωση  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Είναι  $x^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οπότε  $e^{x^2} \geq e^0 = 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$

Άρα το πρόσημο της  $f'$  εξαρτάται από το πρόσημο του  $2x$  και φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$		-	+
$f$		$\searrow$	$\nearrow$

Επειδή η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο στο  $0$ , το  $f(0) = 0$  έχουμε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$  άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα το  $x_0 = 0$ .

**Γ2.**

Από τη σχέση  $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$  έχουμε ισοδύναμα  $|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0)$  και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως

Αν  $x \in (-\infty, 0)$  και  $f(x) < 0$  τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

Αν  $x \in (-\infty, 0)$  και  $f(x) > 0$  τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως,

Αν  $x \in (0, +\infty)$  και  $f(x) < 0$  τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

Αν  $x \in (0, +\infty)$  και  $f(x) > 0$  τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής συνδυασμοί για τον τύπο της  $f$

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Γ3.**

Από το Γ1 παραγωγίζοντας τη πρώτη παράγωγο της  $f$  έχουμε

$$f''(x) = 4e^{x^2}x^2 + 2e^{x^2} - 2, x \in \mathbb{R}$$

Ισχύει ότι

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{και } 4e^{x^2}x^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε από (1) + (2) προκύπτει } 4e^{x^2}x^2 + 2e^{x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=0$ , οπότε η  $f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

#### Γ4.

Για την εξίσωση  $f(|\eta\mu x|+3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$  (1)

Θεωρούμε συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = f(x+3) - f(x)$  στο  $[0, +\infty)$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $[0, +\infty)$ ,

$$\text{με } g'(x) = f'(x+3) \cdot (x+3)' - f'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

Για τη μονοτονία της  $f'$  έχουμε ότι για

$$x < x+3 \stackrel{f' \nearrow [0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$$

οπότε  $g'(x) > 0$  και συνεπώς η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και "1-1" οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$g(|\eta\mu x|) = g(x) \stackrel{g \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow x = 0$$

Αφού από τη θεωρία έχουμε ότι  $|\eta\mu x| \leq |x|$  και για  $x \geq 0$  ισχύει  $|\eta\mu x| \leq x$  με την ισότητα να ισχύει για  $x=0$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Από τη σχέση  $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = \pi$  ισοδύναμα έχουμε,

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \eta \mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \eta \mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + [f'(x) \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) (\eta \mu x)' dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + [f'(\pi) \eta \mu \pi - f'(0) \eta \mu 0]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \sigma \upsilon \nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx - [f(\pi) \sigma \upsilon \nu \pi - f(0) \sigma \upsilon \nu 0]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) (\sigma \upsilon \nu x)' dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + f(\pi) - f(0) - \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi) - f(0) = \pi \quad (1)$$

Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , είναι και συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα και στο  $x = 0$ .

$$\text{ΟΠΟΤΕ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (2)$$

Από τη δεδομένη σχέση  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$ , θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x)}{\eta \mu x}$  με

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1. \text{ ΟΠΟΤΕ } f(x) = g(x) \cdot \eta \mu x \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta \mu x) = 1 \cdot 0$$

όπου λόγω της (2) έχουμε  $f(0) = 0$  (3).

Από τις σχέσεις (1) και (2) και (3) παίρνουμε τελικά  $f(\pi) = \pi$

Για το  $f'(0)$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{\eta \mu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{\eta \mu x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα  $f'(0) = 1$



### Δ 2α.

Παραγωγίζοντας τη σχέση  $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η οποία αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad (1)$$

Έστω ότι η  $f$  έχει ακρότατο στη θέση  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

από το Θεώρημα Fermat έχουμε  $f'(x_0) = 0$  (2).

Οπότε η σχέση (1) για  $x = x_0$  γίνεται

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

οπότε  $f'(0) = 0$  ΑΤΟΠΟ, αφού  $f'(0) = 1$

Άρα η  $f$  δεν έχει ακρότατα στο  $\mathbb{R}$ .

### Δ 2β.

Επειδή

- $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (από Δ2α) και
- η  $f'$  είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αφού η  $f$  είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

επομένως η  $f'$  θα διατηρεί το πρόσημο της. Επιπλέον  $f'(0) = 1 > 0$ , άρα  $f'(x) > 0$  οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

**Δ3.** Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty). \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ισχύει ότι  $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 + 1 = 2$

$$\text{Άρα } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{|f(x)|} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{|f(x)|} \right)$ . Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

**Δ4.** Για το  $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$  θέτουμε  $\ln x = u$ . Άρα  $\frac{1}{x} dx = du$ .

Για  $x=1$  είναι  $u = \ln 1 = 0$  ενώ,

για  $x = e^\pi$  είναι  $u = \ln e^\pi = \pi$ ,

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται  $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du = \int_1^{e^\pi} f(x) dx$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi]$  και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(0) \leq f(x) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \pi.$$

Άρα  $f(x) \geq 0$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=0$ , οπότε  $\int_0^\pi f(x) dx > 0$  (1).

Επίσης  $\pi - f(x) \geq 0$  και η συνάρτηση  $\pi - f(x)$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi]$  και δεν μηδενίζεται παντού, αλλά μόνο στο  $x=\pi$ .

$$\text{Άρα } \int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \pi > \int_0^\pi f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx < \pi(\pi - 0) = \pi^2 \quad (2).$$

Επομένως από (1),(2) προκύπτει  $0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2$ .